

BAB VIII

INTEGRAL LIPAT DUA DENGAN MAPLE

A. Pengantar

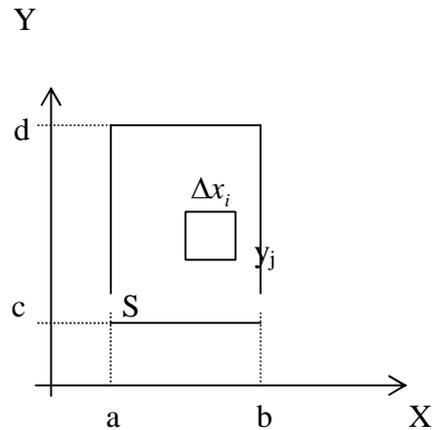
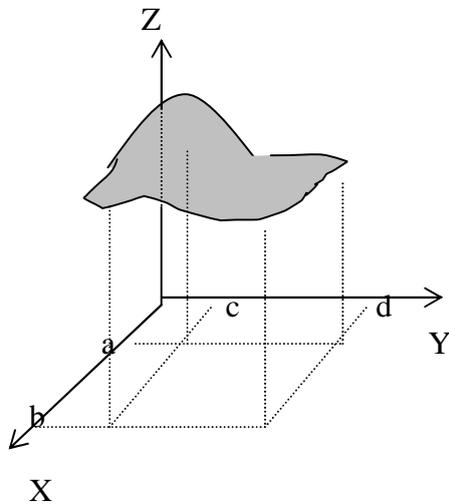
Konsep integral tentu untuk fungsi dengan satu peubah dapat diperluas menjadi untuk fungsi dengan banyak peubah. Integral fungsi satu peubah selanjutnya akan dinamakan integral lipat satu, untuk membedakannya dengan integral lipat yaitu integral untuk fungsi dengan banyak peubah. Aplikasi fisis dan ilmu ukur untuk integral lipat satu merupakan materi pendukung untuk pembahasan dalam materi integral lipat dua.

Pada materi integral lipat satu, fungsi yang dipakai dibatasi, yaitu fungsi tersebut dibatasi pada selang tutup di R_1 . Untuk integral lipat dua dari fungsi dengan dua peubah pembatasannya adalah bahwa fungsi dua peubah tersebut terdefinisi pada suatu daerah tertutup di R_2 . Yang dimaksud daerah tertutup disini adalah daerah beserta dengan batas-batasnya. Apabila dikatakan daerah, maka yang dimaksud adalah daerah tertutup. Dalam tulisan ini akan disajikan materi integral lipat dua beserta contoh soalnya yang akan diselesaikan dengan cara manual dan pengaplikasiannya dalam maple.

B. Integral Lipat Dua atas Persegi Panjang

Suatu permukaan di R_3 memiliki persamaan $z = f(x,y)$. Misalkan daerah S ada pada bidang x - y yang berupa suatu daerah persegi panjang. Daerah persegi panjang tertutup S secara umum dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$S = \{ (x,y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d \} \text{ dimana } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$



Misalkan interval tertutup $[a,b]$ dipartisi menjadi m interval dengan titik-titik partisinya $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = b$, demikian juga interval tertutup $[c,d]$ dipartisi menjadi t interval dengan titik-titik partisinya $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_t = d$. Dengan cara seperti itu maka daerah tertutup S terpartisi menjadi sebanyak $n = m \times t$ bagian daerah persegi panjang kecil. Namakan bagian persegi panjang kecil tersebut dengan $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$.

Misalkan bagian persegi panjang S_k mempunyai panjang x_i dan lebar y_j . Maka luas daerah S_k tersebut adalah

$$A_k = x_i y_j.$$

Selanjutnya untuk setiap $k = 1, 2, 3, \dots, n$ pada daerah S_k diambil sebuah titik (x_k, y_k) dan dikonstruksi jumlah Riemann dalam bentuk deret seperti berikut:

$$\sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) A_k.$$

Misalkan A adalah luas terbesar dari partisi-partisinya, dengan kata lain

$$A = \text{Maks} \{ A_k \}$$

Dalam kasus $f > 0$, maka jumlah Riemann diatas menjadi

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) A_k$$

Selanjutnya jika limit itu ada maka nilai limit ini disebut nilai integral lipat dan dinotasikan dengan:

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy$$

Dengan melihat bahwa $A_k = (x_k \ y_k) = (y_k \ x_k)$, yang berarti $dA = (dx dy) = (dy dx)$, maka diperoleh pula

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dy dx$$

Beberapa catatan tentang nilai integral lipat

1. Notasi $A = (x \ y) = (y \ x)$ secara geometris merupakan luas daerah, sehingga selalu bernilai positif
2. Apabila $f(x,y)$ bernilai positif pada semua daerah integrasi S , maka nilai integral lipat $\iint_S f(x,y)dA$ pasti positif.
3. Apabila $f(x,y)$ bernilai negative pada semua daerah integrasi S maka nilai integral lipat $\iint_S f(x,y)dA$ bernilai negative
4. Nilai $\iint_S f(x,y)dA$ mungkin juga nol.

Contoh:

$$\text{Hitung : } \int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3y) dx \right] dy$$

Penyelesaian: Pada integral sebelah dalam y berupa konstanta, sehingga

$$\int_1^2 (2x + 3y) dx = \left[x^2 + 3yx \right] = 4 + 6y - (1 + 3y) = 3 + 3y$$

$$\begin{aligned} \text{Akibatnya, } \int_0^3 \left[\int_1^2 (2x + 3) dx \right] dy &= \int_0^3 [3 + 3y] dy = \left[3y + \frac{3}{2} y^2 \right]_0^3 \\ &= 9 + \frac{27}{2} = \frac{45}{2} \end{aligned}$$

Aplikasi dalam Maple

$$> \int_0^3 \left(\int_1^2 (2x + 3y) dx \right) dy$$

$$\frac{45}{2}$$

Atau

$$\text{Int}(\text{Int}(2x + 3y, x = 1..2), y = 0..3) = \text{int}(\text{int}(2x + 3y, x = 1..2), y = 0..3);$$

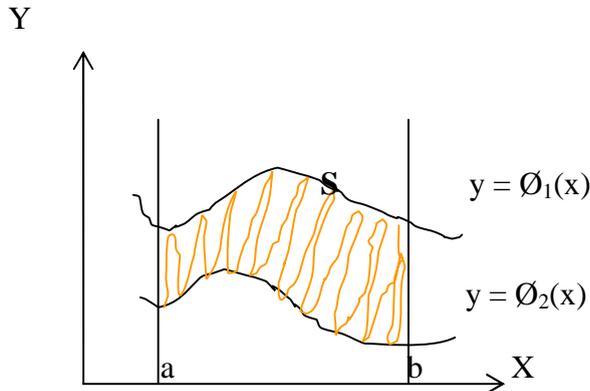
$$\int_0^3 \int_1^2 (2x + 3y) dx dy = \frac{45}{2}$$

C. Integral Lipat Dua atas Daerah Bukan Persegi Panjang

Integral lipat dua dengan daerah integrasi berupa daerah persegi panjang dapat dipandang sebagai integral satu variable yang dilakukan dua kali. Demikian juga halnya untuk daerah integrasi selain persegi panjang, kita terkadang harus harus mengubah urutan pengintegralannya terlebih dahulu untuk mempermudah perhitungan.

Misalkan daerah integrasi $S = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b, \varnothing_1(x) \leq y \leq \varnothing_2(x)\}$

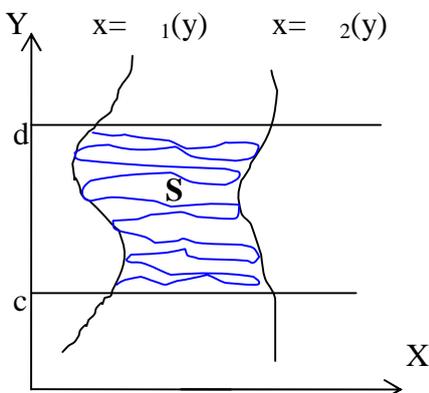
Batas daerah integrasi S adalah batas untuk x berupa konstanta sedangkan batas untuk y berupa fungsi dalam x . Perhatikan gambar berikut, jika x digerakkan dari a ke b maka nilai y bergerak dari fungsi bawah $\varnothing_1(x)$ ke fungsi atas $\varnothing_2(x)$.



Dengan memperhatikan konstruksi jumlah Riemann terhadap integral pada daerah persegi panjang, maka integral lipat pada daerah umum diatas menjadi:

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)dydx$$

Sekarang, jika daerah integrasinya $S = \{(x,y) \mid c \leq y \leq d, \phi_1(y) \leq x \leq \phi_2(y)\}$, maka batas daerah integrasi S adalah untuk y berupa konstanta sedangkan untuk x berupa fungsi dalam y. Perhatikan bahwa apabila nilai y digerakkan dari c ke d maka peubah x bergerak dari kurva kiri kekurva kanan. Secara umum daerah S semacam ini digambarkan sebagai berikut;



Dengan demikian untuk kasus daerah integrasi seperti ini integral lipatnya menjadi:

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx dy$$

Contoh: Hitunglah $\iint_S 3(4-x-2y)dA$, dimana $S = \{(x,y) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq 4-2y\}$

$$\begin{aligned}
 \text{Penyelesaian: } \iint_S 3(4-x-2y)dA &= \int_0^2 \int_0^{4-2y} 3(4-x-2y)dx dy \\
 &= \int_0^2 \left\{ 12x - \frac{3x^2}{2} - 6xy \Big|_0^{4-2y} \right\} dy \\
 &= \int_0^2 \left\{ 12(4-2y) - \frac{3(4-2y)^2}{2} - 6(4-2y)y \right\} dy \\
 &= 16
 \end{aligned}$$

Aplikasi dengan Maple

$$\int_0^2 \left(\int_0^{4-2y} 3(4-x-2y) dx \right) dy = 16$$

atau

$$\begin{aligned}
 &Int(Int(3(4-x-2y), x = 0..4-2y), y = 0..2) \\
 &= int(int(3(4-x-2y), x = 0..4-2y), y = 0..2)
 \end{aligned}$$

$$\int_0^2 \int_0^{4-2y} 12-3x-6y dx dy = 16$$

D. Kesimpulan

- Integral lipat dua merupakan integral dari fungsi dengan dua peubah, dengan batasan bahwa fungsi dua peubah tersebut terdefinisi pada suatu daerah tertutup di R_2 .
- Secara umum, rumus integral lipat dua atas daerah persegi panjang adalah

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dx dy$$

- Rumus integral lipat dua atas daerah bukan persegi panjang adalah

$$\iint_S f(x,y)dA = \int_a^b \int_{\Theta_1(x)}^{\Theta_2(x)} f(x,y)dy dx$$