BAB VI
INTEGRAL LIPAT

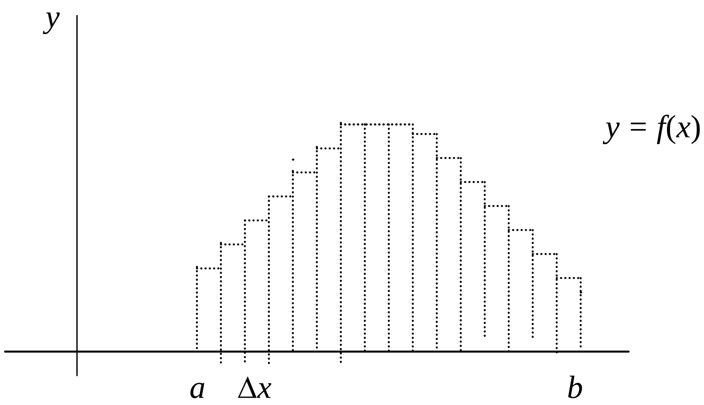
6.1 Pendahuluan

Pada kalkulus dan fisika dasar, kita melihat sejumlah pemakaian integral misal untuk mencari luasan, volume, massa, momen inersia, dsb.nya. Dalam bab ini kita ingin memikirkan dan mengaplikasikan yang lain dari keduanya, integral tunggal dan lipat. Kita akan mendiskusikan keduanya, bagaimana menyusun integral-integral untuk menggambarkan besaran-besaran fisika dan metode evaluasinya. Dalam akhir bab kita akan memerlukan pemakaian keduanya integral tunggal dan lipat. Pertama-tama, marilah kita mendiskusikan secara singkat arti dan evaluasi dari integral lipat.

Setelah selesainya bab ini, mahasiswa diharapkan mampu menyelesai-kan persoalan fisika yang menggunakan integral tunggal maupun lipat.

6.2 Integral Lipat Dua dan Tiga

Mengingat kalkulus bahwa $\int_a^b y\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$ menyatakan suatu luasan "di-bawah kurve" (Gambar 1). Ingat juga definisi integral sebagai limit dari suatu



Gambar 1

jumlah: Kita perkirakan suatu luasan dengan jumlah empat persegi panjang - empat persegi panjang seperti pada Gbr 1; sebuah empat persegi panjang mempunyai lebar Δx. Secara geometri menunjukkan bahwa bila kita menambah jumlah empat persegi panjang dan memisalkan lebar $\Delta x \to 0$, penjumlahan luasan empat persegi panjang akan condong ke luasan di bawah kurva.

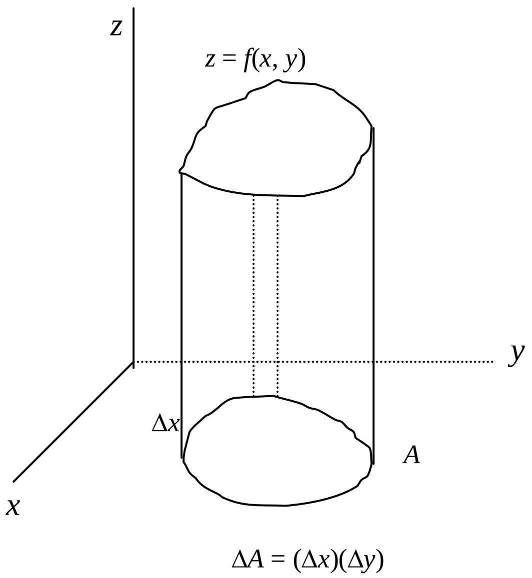
Di definisikan $\int_a^b$ f(x) dx sebagai limit dari jumlah luas empat persegi pan - jang; maka kita evaluasi integral sebagai anti derivative, dan menggunakan $\int_a^b f(x)\, dx$ untuk menghitung luasan di bawah kurva.

Akan kita kerjakan sesuatu dengan cara sama untuk mendapatkan volume silinder (Gbr 2) di bawah permukaan $z = f(x, y)$. Kita potong bidang (x, y) dalam empat persegi panjang kecil-kecil dengan luas $\Delta A = (\Delta x)(\Delta y)$ seperti dalam Gbr.2; di atas setiap $\Delta x\ \Delta y$ adalah kotak kecil tinggi mencapai permukaan. Volume dapat diperkirakan dengan menjumlahkan kotak-kotak seperti kita mem-perkirakan luas dalam Gbr.1 dengan menjumlahkan empat persegi panjang – empat persegi panjang.

Di *definisikan integral lipat dua* dari $f(x, y)$ yang meliputi luasan A dalam bidang (x, y) (Gbr.2) sebagai limit dari penjumlahan ini, dan dituliskan sebagai

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy$$

A disebut *daerah integrasi*, $f(x, y)$ disebut *integran*, x dan y dinamakan *variabel integrasi*.

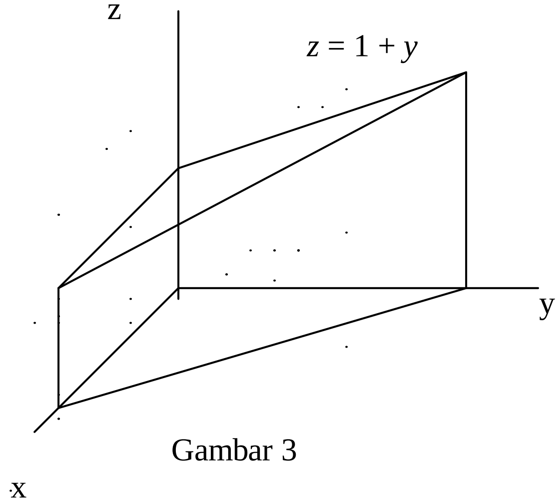


Gambar 2

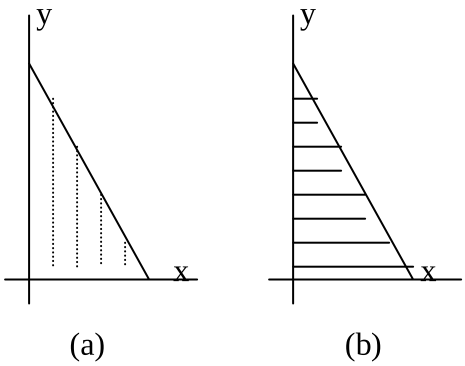
Iterasi Integral Sekarang di perlihatkan dengan beberapa contoh bagaimana mengevaluasi integral lipat dua.

Contoh 1. Cari volume benda (Gbr.3) dibawah bidang $z = 1 + y$, dibatasi dengan bidang-bidang koordinat dan bidang vertikal $2x + y = 2$.

$$\int\int_A z\, dx\, dy = \int\int_A (1 + y)\, dx\, dy,$$



Gambar 3



Gambar 4

dimana A adalah segitiga bayang-bayang dalam bidang (x, y)[A juga diperlihatkan dalam Gbr. 4a dan b)]. Kita evaluasi integral lipat dua dengan dua cara. Kita bayangkan segitiga A dipotong dalam segi empat kecil-kecil $\Delta A = \Delta x\ \Delta y$ (Gbr.4) dan seluruh benda dipotong menjadi kolom-kolom vertikal dengan tinggi z dan dasar ΔA (Gbr.3) . Kita inginkan (limit dari) jumlah volume kolom-kolom ini. Pertama-tama menjumlahkan kolom-kolom (Gr.4a) untuk suatu nilai pasti dari x volume irisan setebal Δx. Hubungan ini untuk pengintegralan menurut y; (x konstan, Gbr.4a) dari $y = 0$ ke y pada garis $2x + y = 2 \rightarrow y = 2 - 2x$; kita peroleh

$$\int_{y=0}^{2-2x} z\, dy = \int_{y=0}^{2-2x} (1 + y)\, dy = \{y + y^2/2\}\Big|_0^{2-2x} \qquad (1)$$

$$= (2 - 2x) + (2 - 2x)^2/2 = 4 - 6x + 2x^2$$

Sekarang kita jumlahkan volume irisan-irisan; hubungan ini untuk pengintegrasian (1) menurut x; dari $x = 0$ sampai $x = 1$

$$\int_{x=0}^{1} (4 - 6x + 2x^2)\, dx = 5/3 \qquad (2)$$

Ringkasan (1) dan (2) kita tuliskan

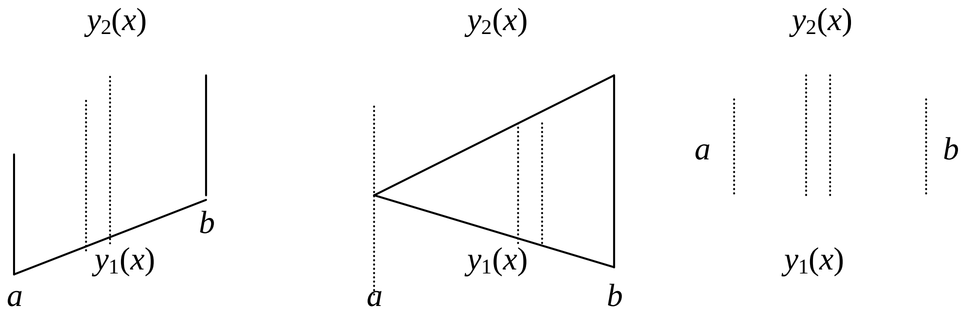
$$\int_{x=0}^{1}\{\int_{y=0}^{2-2x}(1+y)\,dy\,\}dx \quad \text{atau} \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}(1+y)\,dy\,dx \quad \text{atau} \int_{x=0}^{1}dx\int_{y=0}^{2-2x}dy(1+y) \qquad (3)$$

Kita katakan (3) suatu *iterasi* integral. Integral lipat biasanya di evaluasi dengan pemakaian iterasi integral. Sekarang kita jumlahkan volume $z(\Delta A)$ dengan pertama-tama mengintegralkan menurut x (untuk y tetap, Gbr.4b) dari $x = 0$ sampai $x = 1 - y/2$ memberikan volume irisan-irisan yang tegaklurus sumbu y pada Gbr.3, dan kemudian menjumlahkan volume-volume irisan dengan meng-integralkan menurut y; dari $y = 0$ sampai $y = 2$ (Gbr.4b). Kita tuliskan

$$\int_{y=0}^{2}\{\int_{x=0}^{1-y/2}(1+y)\,dx\}\mathrm{dy} = \int_{y=0}^{2}(1+y)\,x\,\Big|_{x=0}^{1-y/2}dy = \int_{y=0}^{2}(1+y)(1-y/2)dy$$

$$= \int_{y=0}^{2}(1+y/2-y^2/2)\,dy = 5/3 \qquad (4)$$

Luasan dalam Gbr. 5; pertama-tama diintegrasikan menurut y. Catatan bahwa atas dan bawah dari luasan A adalah kurve yang persamaannya diketahui; batasnya pada $x = a$ dan $x = b$ adalah kedua-duanya garis tegak lurus.

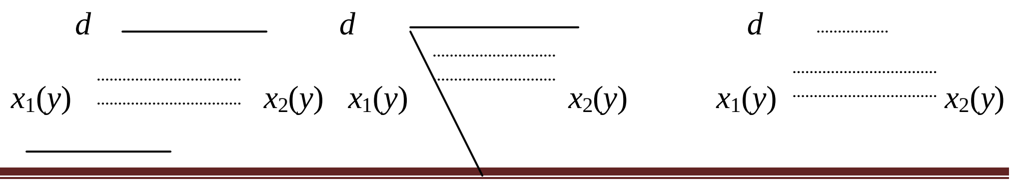


Gambar 5

Kita peroleh

$$\int\int_A f(\mathrm{x},\,\mathrm{y})\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b}\{\int_{y=y1(x)}^{y2(x)} f(x,y)\,dy\}\,dx \qquad (5)$$

Luasan dalam Gbr 6: pertama-tama diintegrasikan menurut x;. Catatan bahwa sisi-sisi dari luasan A adalah kurve yang persamaannya diketahui; batas-batasnya pada $y = c$ dan $y = d$ adalah garis lurus datar.

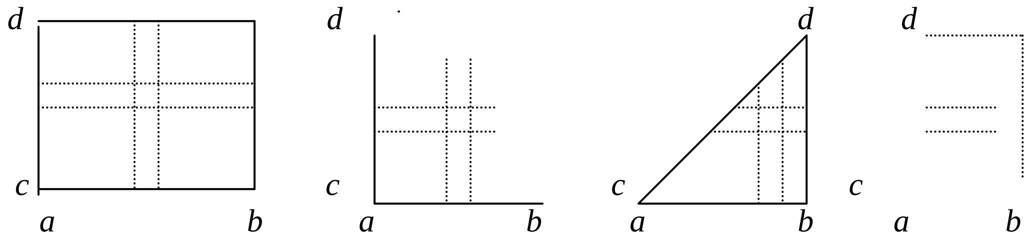


Gambar 6

Kita peroleh

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \{\int_{x=x1(y)}^{x2(y)} f(x, y)\, dx\}\, dy \qquad (6)$$

Luasan dalam Gbr. 7; integrasi dari kedua sisi. Catatan bahwa semua luasan memenuhi syarat untuk keduanya (5) dan (6)



Gambar 7

Kita dapatkan

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=y1(y)}^{y2(x)} f(x, y)\, dy\, dx \qquad (7)$$

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{y=c}^{d} \int_{x=x1(y)}^{x2(y)} f(x, y)\, dx\, dy$$

Bila $f(x, y)$ suatu hasilkali, $f(x, y) = g(x)\, h(y)$. Maka

$$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \int_{y=c}^{d} g(x)h(y)\, dy\, dx \qquad (8)$$

$$= \left[\int_a^b g(x)\, dx\right] \left[\int_c^d h(y)\, dy\right]$$

Contoh 2. Cari massa suatu empat persegi panjang yang dibatasi oleh $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$, $y = 1$, bila kerapatannya (massa per satuan luas) adalah $f(x, y) = xy$.

Massa empat persegi panjang tipis $\Delta A = \Delta x \Delta y$ adalah sekitar $f(x, y)\, \Delta x \Delta y$; dimana $f(x, y)$ di evaluasi pada beberapa titik di ΔA. Kita akan jumlahkan massa dari semua ΔA; ini adalah apa yang di peroleh dengan evaluasi integral lipat dari $dM = xy\, dx\, dy$. Kita katakan dM suatu elemen massa dan

$$M = \int\int_A xy\, dx\, dy = \int^{2} \int^{1} xy\, dy\, dx$$

$$\quad x=0 \quad y=0$$

$$= \left[\int_0^2 x\,dx\right]\left[\int_0^1 y\,dy\right] = 2.1/2 = 1$$

Integral lipat tiga dari $f(x, y, z)$ tentang suatu volume V, dituliskan $\iiint_V f(x, y, z)\,dz$

Contoh 3. Cari volume benda (Gbr.3) menggunakan integral lipat tiga

$$V = \int\int\int_V \,dx\,dy\,dz$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}\left[\int_{z=0}^{1+y} dz\right] dy\,dx \qquad \text{atau}$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}\int_{z=0}^{1+y} dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x} (1+y)\,dy\,dx = 5/3$$

Contoh 4. Cari massa dari benda (Gbr.3) bila kerapatan (massa per satuan volume) adalah $x + z$

$$M = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x}\int_{z=0}^{1+y} (x+z)\,dz\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x} \{xz + z^2/2\}\Big|_{z=0}^{1+y} dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2-2x} \{x(1+y) + (1+y)^2/2\}\,dy\,dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} \{x(1+y)^2/2 + (1+y)^3/6\}\Big|_{y=0}^{2-2x} dx$$

$$= \int_{x=0}^{1} [x/2.\{(3-2x)^2 - 1\} + 1/6.\,\{(3-2x)^3 - 1\}]\,dx$$

$$= 1/3\int_0^1 (13 - 15x + 2x^3)\,dx = 2$$

Latihan

Evaluasilah integral berikut

1. $\int_{x=0}^{1}\int_{y=2}^{4} 3x\,dy\,dx$ 2. $\int_{y=-2}^{1}\int_{x=1}^{2} 8xy\,dx\,dy$ 3. $\int_{y=0}^{2}\int_{x=2y}^{4} dx\,dy$

4 x/2 1 ex 2 y2

4. $\int_{x=0} \int_{y=0} y\,dy\,dx$ 5. $\int_{x=0} \int_{y=x} y\,dy\,dx$ 6. $\int_{y=1} \int_{x=\sqrt{y}} x\,dx\,dy$

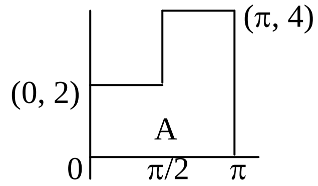
Evaluasilah integral lipat dua berikut

7. $\iint_A (2x - 3y)\,dx\,dy$, dimana A segitiga dengan puncak (0, 0), (2, 1), (2, 0)

8. $\iint_A 6y^2 \cos x\,dx\,dy$, dimana A suatu luasan tertutup oleh kurva $y = \sin x$, sb. x, dan garis $x = \pi/2$.

9. $\iint_A \sin x\,dx\,dy$ dimana A adalah luasan dalam Gbr. 8

Gambar 8



10. $\iint_A y\,dx\,dy$, dimana A adalah luasan (Gbr.8)

11. $\iint_A x\,dx\,dy$, dimana A luasan diantara parabola $y = x^2$ dan garis lurus $2x - y + 8 = 0$

Evaluasilah integral lipat tiga berikut

12. $\int_{x=1}^{2} \int_{y=x}^{2x} \int_{z=0}^{y-x} dz\,dy\,dx$ 13. $\int_{z=0}^{2} \int_{x=z}^{2} \int_{y=8x}^{z} dy\,dx\,dz$

14. $\int_{y=-1}^{3} \int_{z=1}^{2} \int_{x=y+z}^{2y+z} 6y\,dx\,dz\,dy$ 15. $\int_{x=1}^{2} \int_{z=x}^{2x} \int_{y=0}^{1/z} z\,dy\,dz\,dx$

16. Hitung volume prisma tegak yang dibatasi oleh ; $z = 0$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$, dan $z = x + 2y$

17. Hitung volume elipsoida; $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) = 1$

6.3 Aplikasi Integrasi; Integral Tunggal dan Lipat

Contoh 1. Diketahui kurva $y = x^2$ dari $x = 0$ sampai $x = 1$, cari

(a) luas di bawah kurva (luasan dibatasi oleh kurva, sumbu-x, dan garis $x = 1$; lihat Gbr.9)
(b) massa suatu helai bidang dari potongan material dalam bentuk luasan bila kerapatannya (massa per satuan luas) adalah xy
(c) panjang busur dari kurva
(d) *centroid* dari luasan
(e) *centroid* dari busur
(f) momen inersia terhadap sumbu x, y dan z dari soal (b)

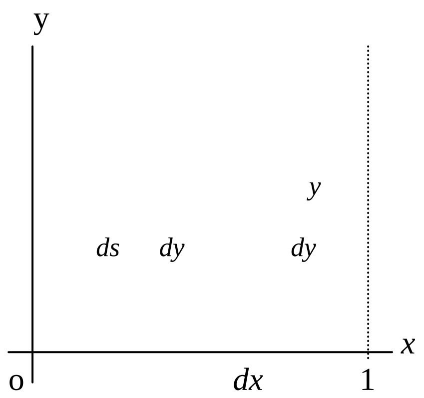
Penyelesaian:

(a) Luasnya adalah

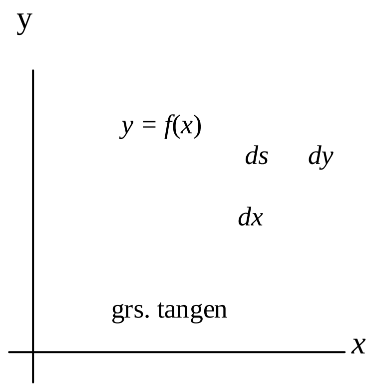
$$A = \int_{x=0}^{1} y\, dx = \int_{0}^{1} x^2\, dx = x^3/3 \Big|_{0}^{1} = 1/3$$

Dapat menggunakan integral lipat dari $dA = dy\, dx$ (lihat Gbr.9),
Maka kita dapatkan

$$A = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} dy\, dx = \int_{0}^{1} x^2\, dx = 1/3$$



Gambar 9



Gambar 10

(b) elemen dari suatu luasan, seperti metode integral lipat (a), $dA = dy\, dx$. Karena kerapatan $\rho = xy$, massa elemen adalah $dM = xy\, dy\, dx$, dan massa total adalah

$$\mathrm{M} = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} xy\, dy\, dx = \int_{0}^{1} x\, dx\ \Big| y^2/2 \Big|_{0}^{x2} = \int_{0}^{1} x^5/2\, dx = 1/12$$

Perhatian kita tidak dapat mengerjakan soal ini sebagai integral tunggal karena kerapatan bergantung x dan y kedua-duanya

(c) elemen dari panjang busur ds didefinisikan seperti ditun jukkan dalam Gbr.9 dan Gbr.10. Jadi kita peroleh

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (dy/dx)^2}\ dx = \sqrt{(dx/dy)^2 + 1}\ dy \qquad (9)$$

Bila $y = f(x)$ mempunyai suatu turunan pertama kontinu dy/dx, dapat kita cari pan jang busur dari kurva $y = f(x)$ antara a dan b dengan menghitung $\int^{b} ds$. Sebagai *a*

contoh

$$dy/dx = 2x, \quad ds = \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$$

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx = \frac{2\sqrt{5} + \ln(2 + \sqrt{5})}{4} \qquad (10)$$

(d) Mengingat fisika dasar bahwa

Pusat massa suatu benda mempunyai koordinat x, y, z dinyatakan dengan persamaan

$$\int x\, dM = \int x\, dM, \quad \int y\, dM = \int y\, dM, \quad \int z\, dM = \int z\, dM \qquad (11)$$

dM adalah massa elemen

Contoh, untuk $z = 0$ karena benda merupakan selembar bahan dalam bidang (x, y). Massa elemen $dM = \rho\, dA = \rho\, dx\, dy$, dengan ρ adalah kerapatan (massa per satuan luas dalam soal ini).

$$\int x\rho\, dA = \int x\rho\, dA \quad \text{atau} \quad \int x\, dA = \int x\, dA \qquad (12)$$

Dengan cara sama, pers. (11) dapat dicari dengan memakai pers. (12). Besaran x, y, z disebut koordinat *centroid* luasan (atau volume atau busur)

Centroid suatu benda adalah pusat massa bila kita asumsikan kerapatan konstan

Dalam contoh, kita mempunyai

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} x\, dy\, dx = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} x\, dy\, dx \quad \text{atau } xA = x^4/4 \Big|_0^1 = 1/4$$

$$\int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} y\, dx\, dy = \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{x2} y\, dx\, dy \quad \text{atau } yA = x^5/10 \Big|_0^1 = 1/10 \qquad (13)$$

Memakai harga A dari bagian (a), didapatkan $x = 3/4$, $y = 3/10$.

(e) pusat massa (x, y) bentuk kawat lengkung dari kurva $y = f(x)$ di berikan oleh

$$\int x\rho\, ds = \int x\rho\, ds, \quad \int y\rho\, ds = \int y\rho\, ds \qquad (14)$$

ρ adalah kerapatan (massa per satuan panjang), dan integral adalah tunggal dengan ds dinyatakan oleh pers.9. Bila ρ konstan, pers.(14) definisi koordinat dari centroid. Sebagai contoh

$$\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}\,dx$$

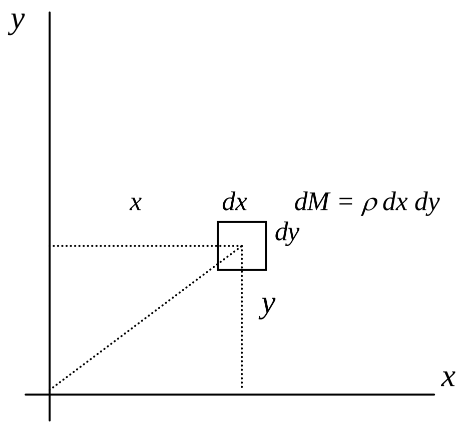
$$\int_0^1 y\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^1 y\sqrt{1+4x^2}\,dx = \int_0^1 x^2\sqrt{1+4x^2}\,dx \tag{15}$$

(f) Kita perlukan definisi berikut

> *Momen inersia I* dari suatu titik massa m terhadap sumbu didefinisikan sebagai perkalian massa dengan jarak kuadrat ℓ dari m ke sumbu ($m\ell^2$)

Dalam contoh dengan kerapatan $\rho = xy$, kita peroleh $dM = xy\,dydx$. Jarak dari dM ke sumbu x adalah y (Gbr.11); demikian pula, jarak dM ke sumbu y adalah x. Jarak dM ke sumbu-z (sb.z tegaklurus kertas pada Gbr.11) adalah $\sqrt{(x^2 + y^2)}$.

Maka ketiga momen inersia terhadap ketiga sumbu koordinat



Gambar 11

$$I_x = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x2} y^2xy\,dy\,dx = \int_0^1 (x^9/4)\,dx = 1/40$$

$$I_y = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x2} x^2xy\,dy\,dx = \int_0^1 (x^7/4)\,dx = 1/16$$

$$I_z = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x2} (x^2 + y^2)xy\,dy\,dx = I_x + I_y = 7/80$$

> Nyata bahwa $I_y + I_x = I_z$ untuk bidang datar pada bidang (x, y) adalah diketahui sebagai teorema tegaklurus sumbu.

Biasanya untuk menulis momen inersia adalah sebagai kelipatan dari massa; memakai M = 1/12 dari (b), kita menulis

$$I_x = 12/40\ M = 3/10\ M,\ \ I_y = 12/16\ M = 3/4\ M,\ \ I_z = (7.12)/80\ M = 21/20\ M$$

Contoh 2. Luas putaran terhadap sumbu x dari contoh1 membentuk suatu volume dan permukaan putaran, dan dapatkanlah

(a) volume

(b) momen inersia terhadap sumbu x suatu benda yang kerapatannya konstan.

(c) luas permukaan lengkung

(d) *centroid* permukaan lengkung.

Penyelesaian

(a) mendapatkan volume

Jalan termudah untuk mendapatkan volume putaran adalah membuat irisan tipis elemen volume benda (Gbr.12). Irisan melingkar dengan jari-jari y dan ketebalan dx; jadi volume elemen adalah $\pi y^2\, dx$.

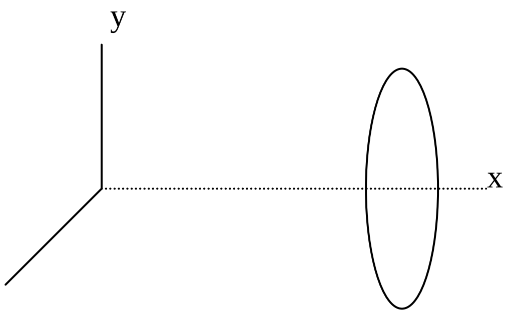
Maka volume dalam contoh adalah

$$V = \int_0^1 \pi y^2\, dx = \int_0^1 \pi x^4\, dx = \pi/5 \qquad (16)$$

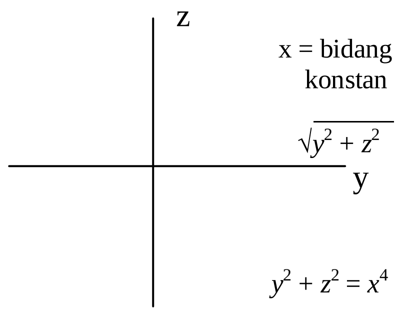
Untuk ilustrasi pemakaian integral lipat tiga (lihat Gbr.12),

misal persamaan permukan

$$y^2 + z^2 = x^4, \quad x > 0 \qquad (17)$$



Gambar 12



Gambar 13

Pada Gbr.13, tiap irisan kita potong dalam potongan dan tiap potongan dalam kotak-kotak kecil dari volume $dx\ dy\ dz$. Volume itu adalah

$$V = \int\int\int \; dx\, dy\, dz$$

Dari Gambar 13, integrasi menurut y dari satu sisi lingkaran $y^2 + z^2 = x^4$ ke sisi lain

$$y = -\sqrt{x^4 - z^2} \qquad \text{sampai} \qquad y = +\sqrt{x^4 - z^2}$$

integrasi menurut z dari bawah sampai puncak lingkaran $y^2 + z^2 = x^4$ adalah jari-jari dari lingkaran = $\pm x^2$.

$$V = \int_{x=0}^{1} \int_{z=-x2}^{x2} \int_{y=-\sqrt{(x4-z2)}}^{\sqrt{(x4-z2)}} dy\, dz\, dx \qquad (18)$$

$$= \int_{0}^{1} \int_{z=-x2}^{x2} dz.2\sqrt{x^4 - z^2}$$

$$= \int_{0}^{1} dx.2.1/2 \left[z\sqrt{x^4 - z^2} + x^4 \arcsin(z/x^2) \right]_{-x2}^{x2}$$

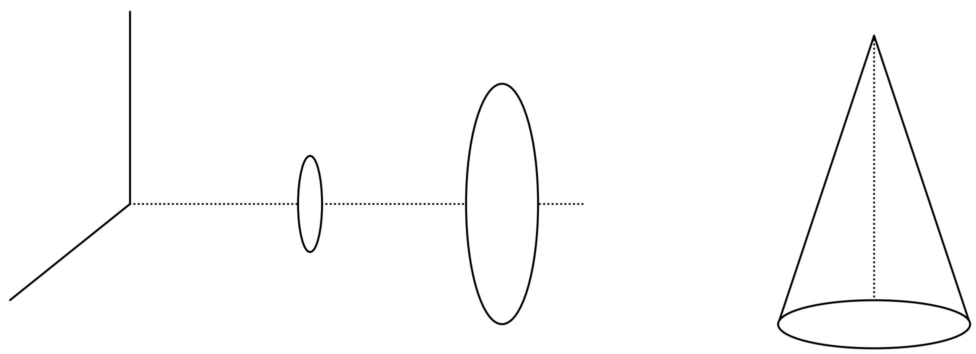
$$= \int_{0}^{1} dx.x^4\{\pi/2 \,.\, 2\} = \int_{0}^{1} \pi x^4\, dx = \pi/5$$

(b) Untuk memdapatkan momen inersia benda terhadap sumbu-x, kita harus mengintegrasi $\ell^2 dM$, ℓ adalah jarak dari dM ke sumbu-x. Dari Gbr.13 Sumbu-x tegaklurus kertas, $\ell^2 = y^2 + z^2$. Di asumsikan kerapatan konstan, karenanya faktor ρ dapat ditulis diluar integral. Maka

$$I_x = \rho \int_{x=0}^{1} \int_{z=-x2}^{x2} \int_{y=-\sqrt{(x4-z2)}}^{\sqrt{(x4-z2)}} (y^2 + z^2)\, dy\, dz\, dx = (\pi/18)\,\rho$$

Karena massa benda adalah

$$M = \rho V = (\pi/5)\rho$$



Gambar 14 Gambar 15

I_x dapat ditulis sebagai kelipatan M:

$$I_x = (\pi/18)(5/\pi)\, M = 5/18\, M$$

(c) Mencari luas permukaan perputaran dengan menggunakan elemen permukaan lengkung suatu irisan tipis (Gbr.14). Ini adalah keliling suatu keping $2\pi y$ dan lebar ds.

Volume total $V = 1/3\pi r^2 h$, h = tegaklurus dasar, luas permukaan lengkung total $S = 1/2.2\pi r.s$, dengan kemiringan tinggi s.

Luas elemen permukaan menjadi $dA = 2\pi y\, ds$	(19)

Luas total adalah

$$A = \int_{x=0}^{1} 2\pi y\, ds = \int_{0}^{1} 2\pi x^2\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$$

(d) Koordinat y dan z *centroid* dari luas permukaan adalah nol karena simetri. Untuk ordinat x, diperoleh

$$A = \int x\, dA = \int x\, dA\ ,$$

Atau memakai $dA = 2\pi y\, ds$ dan luas total A dari (c), kita peroleh

$$xA = \int_{x=0}^{1} x.\ 2\pi y\, ds = \int_{0}^{1} x.2\pi x^2\sqrt{(1 + 4x^2)}\, dx$$

Latihan

Notasi yang digunakan dalam soal:
M = massa
x, y, z = koordinat pusat massa (atau *centroid* bila kerapatan konstan)
I = momen inersia
I_x, I_y, I_z = momen inersia terhadap sb.x, y, z.
I_m = momen inersia lewat pusat massa

1.Untuk batang tipis panjang ℓ dan kerapatan uniform ρ, cari
(a) M
(b) I_m terhadap sumbu tegaklurus batang
(c) I terhadap suatu sumbu tegaklurus batang lewat salah satu ujungnya

2. Tentukan momen inersia suatu batang homogen (kerapatan ρ), terhadap poros yang melalui salah satu ujungnya.

3. Hitung momen inersia suatu empat persegi panjang dengan lebar b dan tinggi h,
   1. terhadap suatu poros yang berimpit dengan garis alas
   2. terhadap suatu poros melalui titik berat, yang sejajar dengan garis alas.

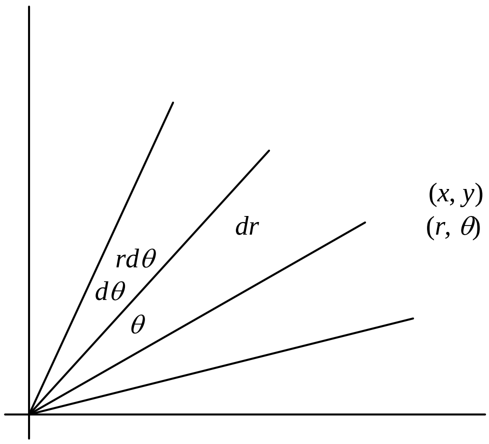
4. Hitung momen inersia Ix dari benda yang dipotong dari bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ oleh silinder $x^2 + y^2 = a^2$

5. Hitung momen inersia terhadap sumbu-z, dari benda yang dibatasi oleh bola $r = a$, dan di bawahnya oleh kerucut $\theta = \pi/3$

6.4. Perubahan Variabel Integrasi; Jacobian

Perubahan variabel integrasi yang lazim digunakan adalah transformasi koordinat Kartesis (x, y) ke polar (r, θ) melalui persamaan transformasi

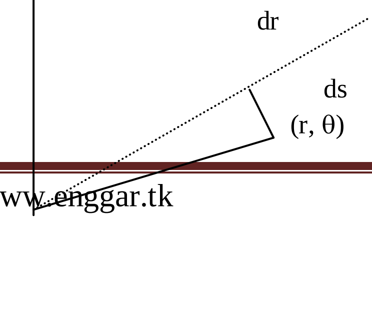
$$x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta \qquad (20)$$



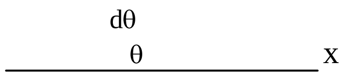
Gambar 16

Dari Gambar diperoleh

$$dA = dr.\, r\, d\theta = r\, dr\, d\theta \qquad (21)$$



Gambar 17



Dari Gambar 17 panjang busur elemen ds adalah

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta,$$
$$ds = \sqrt{(dr/d\theta)^2 + r^2}\, d\theta = \sqrt{1 + r^2(d\theta/dr)^2}\, dr \qquad (22)$$

Contoh 1. Diketahui suatu bahan setengah lingkaran dengan jari-jari a dan kerapatan ρ konstan, hitung

(a) *centroid* dari luasan setengah lingkaran;

(b) momen inersia lembar materi dengan diameter berbentuk sisi lurus dari setengah lingkaran

Penyelesaian

(a) Dari Gbr.18 , karena simetri y = 0. Dicari x, dengan pers.12 diperoleh

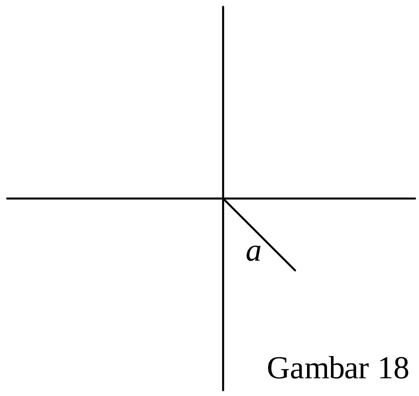
$$\int xr\, dr\, d\theta = \int xr\, dr\, d\theta$$

merubah x ke koordinat polar

$$\int_{r=0}^{a} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r\, dr\, d\theta = \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r \cos\theta\, r\, dr\, d\theta$$

$$x(a^2/2)\pi = (a^3/3) \sin\theta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = a^3/3 \,.\, 2$$

$$x = 4a/3\pi$$



Gambar 18

(b) Momen inersia terhadap sumbu-y (Gambr.18); menggunakan definisi $\int x^2\, dM$. Dalam koordinat polar, $dM = \rho\, dA = \rho r\, dr\, d\theta$. Kerapatan ρ = konstan, maka

$$Iy = \rho \int x^2 r\, dr\, d\theta = \rho \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos^2\theta\, r\, dr\, d\theta = \rho(\pi a^4/8)$$

Karena massa benda setengah lingkaran adalah

$$M = \rho \int r\, dr\, d\theta = \rho \int_{r=0}^{a} \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} r\, dr\, d\theta = \rho\, (\pi a^2/2)$$

maka

$$Iy = (2M/\pi a^2).(\pi a^4/8) = (Ma^2/4)$$

Koordinat Bola dan Silinder

Antara koordinat ortogonal dan koordinat silinder terdapat hubungan

Koordinat berbentuk Silinder:

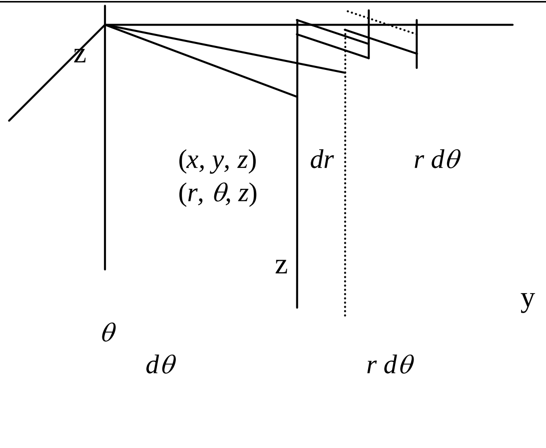
$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$

$dV = r\,dr\,d\theta\,dz$

$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + dz^2$



(23)

Gambar 19

Hubungan antara koordinat orthogonal dan koordinat bola

Koordinat berbentuk Bola :

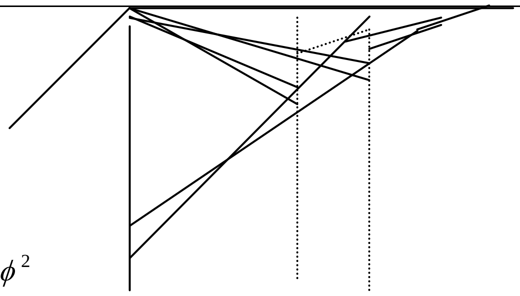
$x = r\sin\theta\cos\phi$

$y = r\sin\theta\sin\phi$

$z = r\cos\theta$

$dV = r^2\sin\theta\;dr\,d\theta\,d\phi$

$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2$



(24)

Gambar 20

Jacobian

Melakukan perubahan variabel atau transformasi koordinat dari sistem x, y ke sistem s, t, adalah determinan dalam pers.(25) di bawah

$$J = J\begin{pmatrix} x, y \\ \text{-----} \\ s, t \end{pmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(s, t)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial s & \partial x/\partial t \\ \partial y/\partial s & \partial y/\partial t \end{vmatrix} \qquad (25)$$

adalah faktor *Jacobi*.

Maka luas elemen *dy dx* digantikan dalam sistem *s, t* dengan luas elemen

$$dA = |J| \quad ds\, dt \qquad (26)$$

Dimana $|J|$ adalah nilai absolut Jacobian dalam pers.25.

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} \qquad (27)$$

Dengan pers.(26) luas elemen adalah $r\, dr\, d\theta$ seperti (21).

Andaikata, kita mempunyai integral lipat tiga

$$\iiint f(u, v, w)\, du\, dv\, dw \qquad (28)$$

pada kumpulan beberapa variabel. Ambil kumpulan variabel lain *r, s, t*, dihubungkan *u, v, w* dengan persamaan

$$u = u(r, s, t), \quad v = v(r, s, t), \quad w = w(r, s, t)$$

Maka bila

$$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(r, s, t)} = \begin{matrix} \partial u/\partial r & \partial u/\partial s & \partial u/\partial t \\ \partial v/\partial r & \partial v/\partial s & \partial v/\partial t \\ \partial w/\partial r & \partial w/\partial s & \partial w/\partial t \end{matrix} \qquad (29)$$

adalah faktor *Jacobi* dari *u, v, w* berhubungan dengan *r, s, t,* integral lipat tiga dalam variabel baru adalah

$$\iiint f \,.\, |J| \,.\, dr\, ds\, dt, \qquad (30)$$

dimana, tentu saja, *f* dan *J* keduanya di ekspresikan dalam hubungan *r, s, t,* dan limit harus sebagaimana mestinya dihubungkan variabel baru.

Kita dapat memakai (29) untuk memeriksa volume elemen (23) untuk koordinat silinder dan volume elemen (24) untuk koordinat bola.

Kita kerjakan menghitung koordinat silinder. Dari pers.(24), kita mendapatkan pers.(31)

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial\theta & \partial x/\partial\phi \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial\theta & \partial y/\partial\phi \\ \partial z/\partial r & \partial z/\partial\theta & \partial z/\partial\phi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\theta\{-\sin^2\phi(-\sin^2\theta - \cos^2\theta) - \cos^2\phi(-\sin^2\theta - \cos^2\theta)\}$$

$$= r^2\sin\theta$$

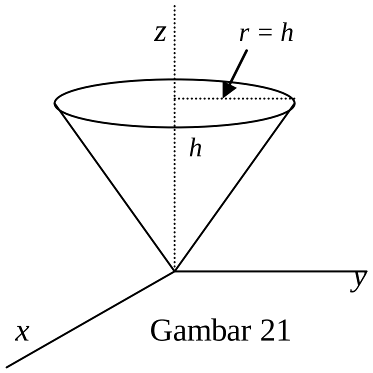
Jadi volume elemen koordinat silinder adalah $dV = r^2 \sin\theta\, \mathrm{dr}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ seperti (24)

Contoh 2. Cari koordinat *z* dari *centroid* benda berbentuk kerucut uniform setinggi *h* sama dengan jari-jari dasar *r*. Juga cari momen inersia benda terhadap sumbunya.

Bila kita letakkan kerucut seperti Gambar 21, pers.nya dalam koordinat silinder adalah $r = z$, karena pada setiap tinggi z, bagian yang memotong adalah suatu lingkaran dengan jari-jari yang sama dengan tingginya. Untuk mendapatkan massa kita harus integralkan $dM = \rho r\, dr\, d\theta$, dengan ρ adalah kerapatan konstan. Limit dari integral adalah

θ: $0 \rightarrow 2\pi$, r: $0 \rightarrow z$, z: $0 \rightarrow h$

Maka kita memperoleh



Gambar 21

$$M = \int \rho\, dV = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{z} \int_{\theta=0}^{2\pi} r\, dr\, d\theta\, dz = \rho \,.\, 2\pi \int_0^h z^2/2 \,.\, \mathrm{d}z = \rho\pi h^3/3,$$

$$\int z\, dV = \int z\, dV = \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{z} \int_{\theta=0}^{2\pi} zr\, dr\, d\theta\, dz$$

$$= 2\pi \int_0^h z \,.\, \tfrac{1}{2} z^2\, dz = \pi h^4/4 \qquad (32)$$

$$z \,.\, \pi h^3/3 = \pi h^4/4$$

$$z = \tfrac{3}{4} h.$$

Untuk momen inersia terhadap sumbu z, kita peroleh

$$I = \rho \int_{z=0}^{h} \int_{r=0}^{z} \int_{\theta=0}^{2\pi} r^2\, r\, dr\, d\theta\, dz = \rho\, .\, 2\pi \int_{0}^{h} z^4/4\, .\, dz = \rho.(\pi h^5/10)$$

Dengan memasukkan harga M dari (32), kita tuliskan I dalam bentuk biasanya sebagai kelipatan M :

$$I = (3M/\pi h^3)(\pi h^5/10) = 3/10\, Mh^2.$$

Contoh 3. Cari momen inersia bola padat dengan jari-jari a terhadap garis tengah. Bila digunakan koordinat bola , persamaan bola adalah r = a. Maka massa adalah

$$M = \rho \int dV = \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi \qquad (33)$$

$$= \rho\, (a^3/3)\, .\, 2\, .\, 2\pi = 4/3\, \pi a^3 \rho$$

Momen inersia terhadap sumbu z adalah

$$I = \int (x^2 + y^2)\, dM = \rho \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{a} (r^2 \sin^2\theta) r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$= \rho\, .\, (a^5/5)\, .\, (4/3)\, .\, 2\pi = (8\pi a^5 \rho/15)$$

atau, pemakaian nilai M, kita dapatkan

$$\boxed{I = 2/5 Ma^2 \qquad (34)}$$

Contoh 4. Cari momen inersia terhadap sumbu z dari elipsoida:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$$

Kita evaluasi

$$M = \rho \int\int\int dx\, dy\, dz \qquad \text{dan} \qquad I = \rho \int\int\int (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$$

dimana integral lipat tiga tentang volume elipsoida. Buat perubahan variabel $x = ax`$, $y = by`$, $z = cz`$; maka $x`^2 + y`^2 + z`^2 = 1$, jadi pada variabel utama kita integralkan atas volume suatu bola dengan jari-jari 1. Maka

$$M = \rho abc \int\int\int dx`\, dy`\, dz` = \rho abc \quad \text{volume bola jari-jari 1.}$$

Menggunakan (33), diperoleh

$$M = \rho\, abc\, .\, 4/3\pi\, .\, 13 = 4/3 \pi \rho\, abc$$

Dengan cara sama

$$I = \rho abc \int\int\int (a^2 x`^2 + b^2 y`^2)\, dV`$$

integral lipat tiga atas volume bola jari-jari 1.

$$\int\int\int x`^2\, dV` = \int\int\int y`^2\, dV` = \int\int\int z`^2\, dV` = 1/3 \int\int\int r`^2\, dV`$$

dimana $r`^2 = x`^2 + y`^2 = z`^2$, dan kita integralkan volume bola bagian dalam $r` = 1$. Marilah kita gunakan koordinat bola dalam sistem utama. Maka

$$\int\int\int r`^2\, dV` = \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{r=0}^{1} r`^2 (r`^2 \sin\theta` dr` d\theta` d\phi`)$$

$$= 4\pi \int_0^1 r`^2\, dr` = 4\pi/5$$

Jadi,

$$I = \rho abc\, [\, a^2 \int\int\int x`^2\, dV` + b^2 \int\int\int y`^2\, dV`\,] = \rho abc(a^2 + b^2).1/3.4\pi/5,$$

atau, dipandang dari segi M,

$$I = 1/5.M(a^2 + b^2)$$

Untuk mendapatkan panjang busur memakai koordinat bola atau silinder, kita memerlukan panjang busur elemen *ds*. Mengingat bahwa mendapatkan elemen panjang busur *ds* (Gbr.17) sebagai garis miring pada segitiga kanan dengan sisi-sisi *dr* dan $r\, d\theta$. Dari Gbr. 16 terlihat bahwa *ds* dapat juga sebagai diagonal dari elemen luasan. Dengan cara sama, dalam koordinat silinder dan bola (Gbr.19 dan 20) elemen panjang busur *ds* adalah diagonal ruang dari elemen volume. Dalam koordinat silinder (Gbr.19), sisi-sisi elemen volume adalah *dr*, $r\, d\theta$, *dz*, jadi elemen panjang busur dinyatakan sebagai

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + dz^2 \qquad \text{(koordinat silinder)} \qquad (35)$$

Dalam koordinat bola (20), sisi-sisi elemen volume adalah *dr*, $r\, d\theta$, $r \sin\theta\, d\phi$, jadi elemen panjang busur dinyatakan sebagai

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin\theta\, d\phi^2 \qquad \text{(koordinat bola)} \qquad (36)$$

Adalah juga tepat untuk mendapatkan panjang busur secara aljabar. Mari kita kerjakan untuk koordinat polar. Dari pers.(20) diperoleh

$$dx = \cos\theta\, dr - r \sin\theta\, d\theta$$

$$dy = \sin\theta\, dr + r \cos\theta\, d\theta$$

Kedua persamaan dikuadratkan dan dijumlahkan, diperoleh

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 \\ &= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\, dr^2 + 0 \,.\, dr\, d\theta + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\, d\theta^2 \\ &= dr^2 + r^2\, d\theta^2 \,. \end{aligned}$$

Contoh 5. Nyatakan kecepatan gerak partikel dalam koordinat bola.

Bila s menggambarkan jarak lintasan gerak partikel, maka ds/dt adalah kecepatan partikel. Persamaan(36) dibagi dt^2, didapatkan untuk kecepatan kuadrat

$$\boxed{v^2 = (ds/dt)^2 = (dr/dt)^2 + r^2\,(d\theta/dt)^2 + r^2 \sin^2\theta\,(d\phi/dt)^2 \quad \text{(koordinat bola)} \qquad (37)}$$

Latihan

1. Diketahui jari-jari suatu lingkaran a, cari dengan integrasi menggunakan koordinat polar
   (a) luasnya
   (b) *centroid* dari kuadran pertama
   (c) momen inersia dari suatu *lamina* lingkaran terhadap diameter
   (d) kelilingnya
   (e) *centroid* busur seperempat lingkaran
2. Untuk suatu bola jari-jari a, dapatkan dengan integrasi
   (a) volumenya
   (b) luas permukaannya
   (c) *centroid* dari belahan bola
   (d) *centroid* luasan permukaan lengkungdari belahan bola
3. (a) Tuliskan integral lipat tiga dalam koordinat bola untuk volume di dalam kerucut $z^2 = x^2 + y^2$ dan antara bidang-bidang $z = 1$ dan $z = 2$. Evaluasi integral ini.

(b) seperti (a) dalam koordinat silinder.

RINGKASAN

$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy$, integral lipat dua dari $f(x, y)$ yang meliputi luasan A dalam bidang (x, y); A disebut *daerah integrasi*, $f(x, y)$ disebut *integran*, x dan y adalah *variabel integrasi* .

$\int\int_A f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y)\, dy \right\} dx$ disebut integral ulangan (iterasi)

$\int\int\int_V f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$, integral lipat tiga dari $f(x, y)$, umumnya batas integrasi menurut z adalah fungsi dari x dan y, batas integrasi menurut y adalah fungsi dari x, sedangkan batas integrasi menurut x adalah bilangan konstan.

Hubungan koordinat ortogonal dan silinder

$$x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta,\ z = z;\ \ dV = r\, dr\, d\theta\, dz$$

Hubungan antara koordinat ortogonal dan bola

$$x = r \sin\theta \cos\phi,\ y = r \sin\theta \sin\phi,\ z = r \cos\theta;\ \ dV = r^2 \sin\theta\, d\theta\, d\phi$$

DAFTAR PUSTAKA

Boas, Mary L.,**Matematical Methods In The Physical Sciences**. John Wiley & Sons, New York, Second Edition, 1983

Spiegel, Murray R., **Advanced Mathematics for Engineers & Scientists**. Schaum’s Outline Series, McGraw-Hill Book Company, 1971.

Wospakrik, Hans J., **Dasar-Dasar Matematika Untuk Fisika**. Institut Teknologi Bandung, 1993.